ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告[1]

２００８年1月２７日（日）　１４：３０−１７：３０

位相の強弱の定義からスタートし、写像族に関する始位相すなわち、写像族を同時に連続にする最弱な位相が存在することを示した。その例として、直積位相と点列収束の位相について扱った。

1　線型空間の位相

定義 1.1 (位相の強弱). X を空でない集合とする。X 上の開集合系 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ が、$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ を満たすとき、$\mathfrak{O}_2$ は $\mathfrak{O}_1$ より、**強い（細かい）**、または $\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_2$ より、**弱い（粗い）**と言う。

定理 1.1 (位相の生成). $\mathfrak{M} \subset 2^X$ が与えられたとき、$\mathfrak{M}$ を含む最弱の位相が存在する。これを $\mathfrak{M}$ **で生成される位相**といい、$\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ と記す。

補題 1.1. X の部分集合の族 $\mathfrak{M} \subset 2^X$ に対して、

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_r \mid \{M_j\}_{j=1}^r \subset \mathfrak{M}\}$$

とおいたとき、$\overline{\mathfrak{M}}$ のメンバーの和集合として、全ての $\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ の元が表せられる。

1.1　始位相　(Initial Topology)

定理 1.2 (始位相). X を集合、$(Y, \mathfrak{O}(Y))$ を位相空間、f を X から Y への写像とするとき、X 上に f を連続にする最弱の位相 $\mathfrak{O}_f(X)$ が存在する。この位相 $\mathfrak{O}_f(X)$ を X 上の f に関する**始位相**と言う。

定理 1.3 (写像族に関する始位相). $(Y_\lambda, \mathfrak{O}(Y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間族、$\Phi = \{f_\lambda \mid f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像族とするとき、X 上に写像族 Φ を同時に連続にする最弱の位相 $\mathfrak{O}_\Phi(X)$ が存在する。この位相 $\mathfrak{O}_\Phi(X)$ を写像族 Φ に関する**始位相**という。

定理 1.4. $(Y_\lambda, \mathfrak{O}(Y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間族、$\Phi = \{f_\lambda \mid f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像族とする。

$$\mathfrak{O}_\lambda = \{f_\lambda^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{O}(Y_\lambda)\} \quad (\forall\lambda \in \Lambda)$$

とおいたとき、写像族 Φ に関する始位相 $\mathfrak{O}_\Phi(X)$ は、$\{\mathfrak{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で生成される位相に一致する。すなわち、

$$\mathfrak{O}_\Phi(X) = \mathfrak{T}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{O}_\lambda\right)$$

例題 1.1 (直積位相). $(X_\lambda, \mathfrak{O}(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間族、写像族 Π を

$$\Pi = \left\{\pi_\lambda \mid \pi_\lambda : X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda \text{は射影}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$$

とするとき、写像族 Π に関する始位相を**直積位相**という。

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

練習問題 1.1. $\mathbb{R}$ をユーグリッド直線とする。

$$\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ (j = 1, 2, \cdots, n) \text{ を射影とする。}\quad \Pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n\}$$

この時、$\mathbb{R}^n$ の直積位相はユーグリッド位相と一致することを示せ。

例題 1.2 (点別収束の位相). 空でない集合 X から $\mathbb{R}$ への写像全体 $Map(X, \mathbb{R})$ に次の様に位相を入れることができる。任意の $x_0 \in X$ を固定し、

$$\hat{x_0}(f) = f(x_0) \quad for\ \forall f \in Map(X, \mathbb{R})$$

とし、写像族 $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$ を考える。$Map(X, \mathbb{R})$ 上の $\hat{X}-$ 始位相 $\mathfrak{I}_{\hat{X}}$ を**点別収束の位相**という。

練習問題 1.2.

1. $\hat{x}$ は $Map(X, \mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への環準同型である。
2. $Map(X, \mathbb{R})$ の原点 0 の基本近傍系を求めよ。
3. $g \in Map(X, \mathbb{R})$ のの基本近傍系を求めよ。
4. $f_n \to f\ in\ \mathfrak{I}_{\hat{X}} \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)\ for\ \forall x \in X$

記録　J.S